

# Uso do método de Monte Carlo para validar a análise de incerteza da calibração do volume de um provador compacto realizada através do GUM

## Use of Monte Carlo method for validating GUM in the calculation of the measurement uncertainty of a compact prover calibration

**Heber F. F. de Castro<sup>1</sup>, Marcos H. G. de Aquino**<sup>2</sup>

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO), Rio de Janeiro, Brasil

<sup>1</sup>[hfcastro@inmetro.gov.br](mailto:hfcastro@inmetro.gov.br), <sup>2</sup>[mhaquino@inmetro.gov.br](mailto:mhaquino@inmetro.gov.br)

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma comparação da análise de incerteza da calibração do volume padrão de um provador compacto usando as metodologias do GUM e de Monte Carlo. Verificou-se, a partir dos resultados desta análise, que é possível utilizar o método de Monte Carlo para validar o método do GUM neste tipo de calibração. A diferença entre os limites inferior e limites superior do intervalo de confiança (probabilidade de abrangência de 95 %) desses dois métodos é menor que 0,0005 dm<sup>3</sup>.

**Palavras-chave:** GUM, Monte Carlo, provador compacto, incerteza de medição, calibração.

**Abstract:** This work presents an uncertainty analysis of a compact prover calibration using GUM and Monte Carlo methods. The results of this analysis pointed out that Monte Carlo method can be used to validate GUM method in this calibration. The difference between inferior limits and superior limits of the interval (coverage probability of 95 %) of these methods is less than 0,0005 dm<sup>3</sup>.

**Keywords:** GUM, Monte Carlo, compact prover, uncertainty, calibration.

### 1. INTRODUÇÃO

Provador compacto é um sistema de medição padrão da grandeza volume que utiliza um pistão para definir o volume padrão no interior do cilindro por meio de dois sensores de posição. O provador é utilizado, em geral, para calibrar medidores de vazão ou totalizadores de volume de líquidos. Por outro lado, a calibração de um provador compacto consiste na determinação do volume de líquido deslocado pelo pistão entre os sensores de posição na temperatura e pressão de referência. O método escolhido neste trabalho para calibrar o provador compacto foi o gravimétrico. Neste método, o volume do provador entre sensores (volume a ser calibrado)

é determinado com base na massa de água (referência) medida em um recipiente instalado sobre uma balança e convertida para volume de água nas condições de pressão e temperatura de calibração do provador.

Neste trabalho, realizou-se inicialmente uma análise de incerteza da calibração do volume de referência de um provador compacto utilizando-se o método do GUM (Guia para a Expressão da Incerteza de Medição) [1]. Em seguida, foi utilizado o método de Monte Carlo para determinar uma estimativa do volume do provador, bem como, o intervalo de confiança onde é possível encontrar o volume estimado do provador para uma probabilidade de abrangência (p.a.) de 95 %. Verificou-se que o método de

Monte Carlo é bastante adequado para a validação do método do GUM quando aplicado na determinação do volume do provador e da sua incerteza de medição.

## 2. CALIBRAÇÃO DO PROVADOR PELO MÉTODO GRAVIMÉTRICO

A figura 1 mostra o esquema para calibração do provador pelo método gravimétrico usando um “kit water draw”. As principais características deste provador são as seguintes: volume nominal (151 dm<sup>3</sup>); faixa de vazão (22,5 dm<sup>3</sup>/min a 22.500 dm<sup>3</sup>/min); material de construção (aço inoxidável); diâmetro interno (520,70 mm); espessura da parede (54,191 mm).

O volume a ser calibrado do provador (referência) corresponde ao volume deslocado pelo pistão entre as posições VOL<sub>1</sub> e VOL<sub>3</sub> da barra de sensores. Inicialmente, a água da caixa d’água é bombeada para o provador e o pistão começa a se deslocar para a direita partindo da posição S<sub>1</sub> na barra de sensores. O fluxo de água que sai do pistão é dirigido para o “kit water draw”. A válvula solenoide desse “kit” atua como um divisor, desviando o fluxo de água para o recipiente sobre a balança (BAL-002) ou para a cisterna (descarte). O “kit water draw” possui uma válvula V1 que controla a vazão de água. O fechamento desta válvula reduz a vazão para um valor mínimo e sua abertura total produz vazão máxima. Esta vazão é ajustável manualmente.

Entre as posições S<sub>1</sub> e VOL<sub>1</sub> da barra de sensores, a água vai para a cisterna via ramal “1”. Um pouco antes da haste do provador alcançar a posição VOL<sub>1</sub>, a válvula V1 é fechada manualmente, visando reduzir a vazão de água que flui para a cisterna, e conseqüentemente, a incerteza de medição, pois existe uma perda de água devido ao fato da válvula solenoide não mudar a direção do fluxo instantaneamente. O volume de fluido perdido durante o acionamento da válvula solenoide é uma das maiores fontes de incerteza da calibração. Logo após a haste do provador passar pela posição VOL<sub>1</sub>, a válvula V1 é aberta totalmente para aumentar a vazão para o máximo. Isto é feito para reduzir o tempo de execução de uma corrida de calibração. Entre as posições VOL<sub>1</sub> e VOL<sub>3</sub>, o fluxo de água é direcionado para o recipiente via ramal “2”. Um pouco antes da haste atingir a posição VOL<sub>3</sub>, a válvula V1 é fechada de novo para reduzir a vazão para o mínimo, e conseqüentemente, o volume de água perdido na comutação da válvula solenoide. Após a haste passar na posição VOL<sub>3</sub>, a válvula V1 é aberta aumentando a vazão, fazendo o pistão se deslocar rapidamente até a posição S<sub>2</sub>. A massa de água transferida para o recipiente é pesada na balança e convertida para volume de referência servindo de base para o cálculo do volume do provador entre as posições VOL<sub>1</sub> e VOL<sub>3</sub>.

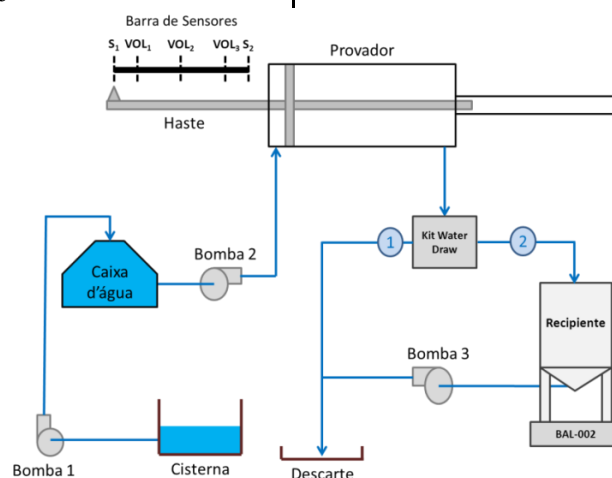


Figura 1. Esquema de calibração do provador.

### 3. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático da calibração do provador compacto especificado na seção anterior é baseado na norma ISO 4267-2 [2]. A equação que representa este modelo é dada por

$$V_p = \frac{\frac{(M_{a1} - M_{a2})(1 - \rho_{ab}/\rho_b)}{\left\{ \left\{ a_5 \left[ 1 - \frac{(T_{Lb} + a_1)^2 (T_{Lb} + a_2)}{a_3 (T_{Lb} + a_4)} \right] + \Delta\rho_w \right\} - \left[ \frac{(k_1 P_a - k_2 H \cdot \exp(k_3 T_a))}{(k_4 + T_a)} \right] \right\}}{\left\{ a_5 \left[ 1 - \frac{(T_p + a_1)^2 (T_p + a_2)}{a_3 (T_p + a_4)} \right] + \Delta\rho_w \right\}}}{\left[ (1 + \beta_c (T_p - T_R)) (1 + \alpha_b (T_b - T_R)) \right] \left[ 1 + \frac{P_p D}{E e} \right] \left[ \frac{1}{1 - P_p (F a_2 T_p^2 + F a_1 T_p + F a_0)} \right]} + \delta V_p + \delta V_v \quad (1)$$

Onde,

$V_p$  : volume calculado do provador na temperatura e pressão de referências ( $\text{dm}^3$ );  $M_{a1}$  : massa do recipiente cheio após a transferência da água do provador para a balança (kg);  $M_{a2}$  : massa do recipiente vazio antes da transferência da água do provador (kg);  $\rho_{ab}$  : massa específica do ar no momento da calibração da balança ( $\text{kg}/\text{dm}^3$ );  $\rho_b$  : massa específica dos pesos padrão utilizados na calibração da balança ( $\text{kg}/\text{dm}^3$ );  $T_{Lb}$  : temperatura da água no recipiente sobre a balança ( $^{\circ}\text{C}$ );  $\Delta\rho_w$  : erro devido a impurezas da água de calibração em relação à água pura de referência ( $\text{kg}/\text{dm}^3$ );  $P_a$  : pressão barométrica (hPa);  $H$  : umidade relativa do ar (%);  $T_a$  : temperatura do ar ( $^{\circ}\text{C}$ );  $T_p$  : temperatura do provador ( $^{\circ}\text{C}$ );  $\beta_c$  : coeficiente volumétrico de expansão térmica do material do provador ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ );  $T_R$  : temperatura de referência do provador ( $20^{\circ}\text{C}$ );  $\alpha_b$  : coeficiente de dilatação térmica linear da barra de sensores ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ );  $T_b$  : temperatura da barra de sensores ( $^{\circ}\text{C}$ );  $P_p$  : pressão do líquido dentro do provador (kPa);  $D$  : diâmetro interno do cilindro do provador (mm);  $E$  : módulo de elasticidade do material do cilindro do provador (kPa);  $e$  : espessura da parede do provador (mm);  $\delta V_p$  : erro devido à variação aleatória na determinação do volume do provador ( $\text{dm}^3$ );  $\delta V_v$  : erro devido à operação de comutação da válvula solenoide do kit water draw ( $\text{dm}^3$ );

### 4. ANÁLISE DE INCERTEZA USANDO O GUM

Nesta análise foram consideradas 23 fontes de incerteza (grandezas de entrada). O resultado da calibração do provador usando o GUM é o seguinte: o volume calculado do provador na temperatura e pressão de referência é de  $151,427 \text{ dm}^3$  e sua incerteza combinada é de  $0,005580 \text{ dm}^3$ . A incerteza expandida é cerca de  $0,01096 \text{ dm}^3$  com uma probabilidade de abrangência de 95 % e graus de liberdade efetivo de 700, resultando em um fator de abrangência  $k_{95} = 1,9634$ .

### 5. VALIDAÇÃO DO GUM POR MONTE CARLO

Na aplicação do método de Monte Carlo na análise de incerteza, cada grandeza de entrada

(componente de incerteza) é transformada numa função de distribuição de probabilidade (por exemplo: retangular, normal, etc.). Em seguida, é realizada a convolução dessas distribuições usando o modelo matemático da calibração, resultando assim na distribuição de probabilidade final do mensurando. Na simulação numérica por Monte Carlo, é gerado um número aleatório, correspondente a cada componente de incerteza, que é introduzido no modelo matemático da calibração (eq. 1). Realizando muitas iterações numéricas com este modelo é possível gerar a distribuição de probabilidade do mensurando [3]. No presente trabalho foram realizadas  $10^5$  iterações usando o método de Monte Carlo. O software empregado para simulação foi o Monte Carlo Mini Macro-VBA (v.5.6) do MS Excel.

Para uma probabilidade de abrangência de 95 %, o intervalo de confiança de acordo com

GUM é  $[y - U(y), y + U(y)]$ , e para o método de Monte Carlo esse intervalo é dado por  $[Q(0,025), Q(0,975)]$ , onde  $y$  é a estimativa do mensurando,  $U(y)$  é a incerteza expandida,  $Q(0,025)$  e  $Q(0,975)$  são as funções de distribuição de probabilidade acumulada para  $X \leq 0,025$  e  $X \leq 0,975$ , respectivamente, onde  $X$  é uma variável aleatória contínua.

Para a validação do GUM é necessário comparar esses dois intervalos. Isto é feito calculando-se a diferença entre os limites inferior do intervalo dos dois métodos, como também, do superior, como segue [3]

$$\begin{aligned} d_{low} &= |[y - U(y)] - Q(0,025)| \\ d_{high} &= |[y + U(y)] - Q(0,975)| \end{aligned} \quad (2)$$

Para o GUM ser validado  $d_{low} < \delta$  e  $d_{high} < \delta$  [3], onde  $\delta$  é a *tolerância numérica associada a uma incerteza*, definida por [3]

$$\delta = \frac{1}{2} 10^l \quad (3)$$

O valor de  $\delta$  é calculado expressando-se a incerteza padrão combinada (obtida por GUM) na forma “ $c \times 10^l$ ”, onde “ $c$ ” é um número inteiro com uma quantidade de dígitos igual ao

número de algarismos significativos da incerteza padrão e “ $l$ ” um número inteiro.

Considerando o volume calculado do provador por GUM com três casas decimais, ou seja, 151,427 dm<sup>3</sup>, a incerteza combinada correspondente é 0,006 dm<sup>3</sup> (com arredondamento). Essa incerteza é expressa na forma  $6 \times 10^{-3}$ , ou seja,  $l = -3$  e  $\delta = 0,0005$ . A tabela 1 mostra a comparação entre o método de Monte Carlo e GUM quando aplicado à calibração do provador compacto. Verifica-se desta tabela que o GUM foi validado.

Vale fazer um esclarecimento sobre o número de algarismos significativos usados nesta análise. O volume estimado foi escrito com 3 casas decimais após a vírgula, ou seja, 151,427 dm<sup>3</sup>. Contudo, as incertezas combinada e expandida calculadas pelo GUM foram especificadas com 5 casas decimais. Isto foi feito para que o leitor percebesse o processo de arredondamento para a obtenção do valor “ $l$ ” acima, e conseqüentemente, o valor da tolerância numérica  $\delta = 0,0005$  dm<sup>3</sup>. Por outro lado, os limites inferior e superior do intervalo de confiança foram escritos com 6 casas decimais para mostrar o processo de validação do GUM que envolve grandezas que têm pequenos valores, necessitando assim serem escritas com muitas casas decimais.

**Tabela 1.** Comparação da análise de incerteza da calibração do provador por GUM e Monte Carlo.

Parâmetros estatísticos	GUM	Monte Carlo (MC)	GUM-MC	Validação de GUM
Volume estimado (dm <sup>3</sup> )	151,427	151,427	-	-
Limite inferior do intervalo (dm <sup>3</sup> ) (p.a. = 95 %)	$y - U(y) =$ 151,416030	$Q(0,025) =$ 151,415849	$d_{low} =$ 0,00018063	$d_{low} < \delta = 0,0005$ (Validado)
Limite superior do intervalo (dm <sup>3</sup> ) (p.a. = 95 %)	$y + U(y) =$ 151,4379405	$Q(0,975) =$ 151,43776	$d_{high} =$ 0,00018012	$d_{high} < \delta = 0,0005$ (Validado)

## 6. CONCLUSÕES

- 1) O método de Monte Carlo pode ser usado para validar o GUM na calibração do volume de referência de um provador compacto;
- 2) A diferença entre os limites inferior e limites superior do intervalo de confiança (p.a. = 95 %) dos dois métodos é aproximadamente igual a  $0,00018 \text{ dm}^3 < \delta = 0,0005 \text{ dm}^3$ . Este resultado foi obtido realizando-se  $10^5$  iterações numéricas através do método de Monte Carlo.

## REFERÊNCIAS

- [1] JCGM 100, 2008, *Avaliação de Dados de Medição – Guia para a Expressão de Incerteza de Medição*, 1ª edição do original, JCGM.
- [2] ISO 4267-2, 1988, *Petroleum and Liquid Petroleum Products – Calculation of Oil Quantities – Part 2: Dynamic Measurement*, 1ª edição, ISO, Suíça.
- [3] JCGM 101, 2008, *Evaluation of Measurement Data – Supplement 1 to the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” – Propagation of Distributions using a Monte Carlo Method*, 1ª edição, JCGM.